61. Дайте определение разностной схемы.
62. Что такое условие согласования норм?
63. Дайте определение аппроксимации разностной задачей исходной дифференциальной задачи.
64. Дайте определение устойчивости разностной схемы.
65. Дайте определение сходимости разностной схемы.
66. Что означает, что разностная задача имеет m-й порядок точности?
67. Дайте определение корректной постановки разностной схемы.
68. Что означает выражение: из аппроксимации и устойчивости разностной схемы следует ее сходимость? Для каких разностных схем оно справедливо?

Здесь мы обсудим всякие занудные моменты с разностными схемами к экзамену.

61. Дайте определение разностной схемы.

Интуитивно мы понимаем, что это такое. Вот что пишет Боголюбов:

$$\begin{cases} \hat{L}_h y_h(x) = \phi_h(x), & x \in \omega_h; \quad (504.1) \\ \hat{l}_h y_h(x) = \chi_h(x), & x \in \gamma_h. \quad (504.2) \end{cases} \qquad (504)$$

Семейство уравнений (504), зависящих от параметра h, называется **разностной схемой.**

Где ω_h – внутренняя сетка, а γ_h – сетка на границе.

Можно сказать, что разностной схемой называется ***система уравнений*** на значения сеточной функции ***внутри*** и ***на границе***.

62. Что такое условие согласования норм?

У нас для u(x) есть норма, определённая «в пространстве H_0» как $\sqrt{\int u^2(x)dx}$.

Можно ввести норму и для сеточных функций, только интеграл тогда заменится конечной суммой: $\sqrt{\sum_{i=1}^{N} u_i^2}$, N – число узлов в сетке.

Условие согласования норм заключается в том, что

Поставим *условие согласования норм*:

$$\lim_{h\to 0} ||u_h||_h = ||u||_0,$$

где $u_h = \hat{P}_h u$, $||u||_0$ - норма в пространстве $\mathbb{H}_0$.

при стремлении шага сетки h к 0 (а N к бесконечности) норма любой функции, подсчитанная через конечную сумму, стремится к норме, подсчитанной через интеграл.

64. Дайте определение устойчивости разностной схемы.

Если мы ГУ изменим на чуть-чуть, то и решение (по норме – для этого мы её и вводили в вопросе 62) изменится на чуть-чуть ☺

63. Дайте определение аппроксимации разностной задачей исходной дифференциальной задачи.

66. Что означает, что разностная задача имеет m-й порядок точности?

Не понял отличия между этими вопросами. Ответ один:

Будем говорить, что L_h аппроксимирует L с порядком $m > 0$ в точке x, если

$$\psi(x) = \hat{L}_h u(x) - \hat{L}u(x) = \mathcal{O}(|h|^m). \qquad (503)$$

67. Дайте определение корректной постановки разностной схемы.

Схема (504) *корректна* (разностная задача поставлена корректно), если при всех достаточно малых $|h| \leqslant h_0$:

1) разностная задача однозначно разрешима при любых входных данных ϕ_h, χ_h;

2) решение y_h равномерно по h непрерывно зависит от входных данных (свойство устойчивости).

65. Дайте определение сходимости разностной схемы.

При уменьшении шага сетки h сеточное решение стремится к нормальному. Правда, по-простому это написать, т.к. сеточная функция определена лишь в узлах. Поэтому точнее будет сказать, что стремится к нулю норма невязки:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(u_{i_\text{истинн}} - u_{i_\text{сеточн}}\right)^2}$$

68. Что означает выражение: из аппроксимации и устойчивости разностной схемы следует ее сходимость? Для каких разностных схем оно справедливо?

Это означает, что если схема устойчива, а операторы в ней аппроксимируют производные, то она сходится ☺

А для каких схем это верно? Рассказываю кулстори.

В конспекте Боголюбова я ничего на эту тему не нашёл. В конспекте Тихонова

В курсе дифференциальных уравнений было доказано, что из аппроксимации и устойчивости следует сходимость с порядком, равным порядку аппроксимации.

Ничего не сказано про несправедливость. И я подумал, что для любых.

Сдавал экзамен я Александру Николаевичу Боголюбову, и ответ узнал лишь на экзамене. Это справедливо ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ разностных схем! Кстати, один из любимых допвопросов Александра Николаевича.